

基于大地经纬度的二维 TDOA 无源定位

马方立^{1,2,3}, 徐扬^{3,4}, 徐鹏^{3,4}

(1. 西南交通大学信息科学与技术学院, 四川 成都 611756; 2. 四川省无线电监测站, 四川 成都 610052;
3. 系统可信性自动验证国家地方联合工程实验室, 四川 成都 610031; 4. 西南交通大学数学学院, 四川 成都 611756)

摘 要: 因地球表面并非平面, 采用平面坐标的传统 TDOA 无源定位模型可能存在一定的误差。为了直接利用大地经纬度坐标进行 TDOA 定位, 提出了基于球面两点间距离计算的一系列球面距离计算 TDOA 定位模型。通过最优化建模, 以网格逐点搜索求解法进行模型验证。数值分析结果表明, 球面精确计算模型定位误差最小, 与纬度无关; 球面近似计算模型的定位误差次之, 随纬度升高而增加; 等距离正圆柱投影模型在低纬度地区定位误差较小, 但在中、高纬度地区定位误差大; 等角度正圆柱投影模型和等面积正圆柱投影模型的定位误差比较大, 在任何纬度时均在 26% 左右, 不可用。

关键词: 无源定位; 到达时间差; 经纬度; 球面精确计算; 球面近似计算

中图分类号: TN802

文献标识码: A

doi: 10.11959/j.issn.1000-436x.2019118

2D-TDOA passive location based on geodetic longitude and latitude

MA Fangli^{1,2,3}, XU Yang^{3,4}, XU Peng^{3,4}

1. School of Information Science and Technology, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China

2. Sichuan Provincial Radio Monitoring Station, Chengdu 610052, China

3. National-Local Joint Engineering Laboratory of System Credibility Automatic Verification, Chengdu 610031, China

4. School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China

Abstract: Because of the surface of the earth is not a plane, there may be some errors in the conventional ultra-short wave passive TDOA location method using plane coordinates. In order to use the geodetic longitude and latitude coordinates directly for TDOA location, a series of spherical distance TDOA location models based on spherical two-point distance calculation were proposed. The optimal location models were adopted, and a grid point search method was applied with model validation. The numerical results show that the spherical precise calculation model has the smallest positioning error, which is independent of latitude. Positioning error of the spherical approximation calculation model is worse than the first model, and increases with the increase of latitude. The equidistant orthographic cylindrical projection model has a small positioning error in the low latitudes. However, it has a large positioning error in the middle and high latitudes. The equiangular orthographic cylindrical projection model and the equiareal orthographic cylindrical projection model have a relatively large positioning error, which is around 26% at any latitude and is not applicable.

Key words: passive location, TDOA, longitude and latitude, spherical precise calculation, spherical approximate calculation

收稿日期: 2018-11-06; 修回日期: 2019-04-21

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No.61673320); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目 (No.2682018ZT10, No.2682018CX59); 四川省教育厅科研基金资助项目 (No.18ZB0589)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (No.61673320), The Central University Basic Business Expenses Special Funding for Scientific Research Project (No.2682018ZT10, No.2682018CX59), Scientific Research Foundation of the Education Department of Sichuan Province (No.18ZB0589)

1 引言

到达时间差 (TDOA, time difference of arrival) 无源定位是利用布设在不同地点的多个接收点同时接收某一信号源发出的信号, 并通过测量接收点两两之间的信号到达时间差来确定信号源位置的方法。TDOA 无源定位研究始于 20 世纪 60 年代, 采用三维直角坐标^[1]; Stilp^[2]于 20 世纪 90 年代将此技术用于公众移动通信网络终端定位。

由于时差测量技术的进步, TDOA 无源定位技术在移动通信网定位、跟踪^[3]和无线电监测定位这 2 个领域的应用日益广泛。TDOA 定位方法本质上通过测量无线电波到达时间差来表示到达距离差, 从而实现定位, 故距离计算的准确度与定位的准确度密切相关。现有文献^[1-12]多以平面直角坐标表示, 往往假设某一监测站点为坐标原点, 例如, 文献[10]“令 $R_{i,1}$ 为待测目标到第 i 个定位基站和第一个定位基站 (本文定义为 中心基站) 之间的距离差”; 文献[13]提出“需要将大地经纬度坐标转换为平面直角坐标, 计算出 X 、 Y 后, 再把 X 、 Y 转换为经纬度坐标。由于地球不是一个标准的球体, 平面直角坐标系和地图坐标系转换后会有误差, 误差有时会达到几千米”, 并指出“使用百度、谷歌、高德中某一家的地图, 就使用某一家的转换算法”。

文献[14]研究了 TDOA 定位中经纬度与平面坐标转换方案, 分析了地球在椭球模型下的几种投影算法, 但未见直接利用大地经纬度进行 TDOA 定位的研究文献。

在卫星导航日益普及的今天, 大地坐标是易于获取并广泛使用的坐标, 地球上任意一点的位置可以用大地经度、大地纬度和大地高表示。为了提高定位精度、减少误差, 本文提出了基于大地坐标的 2 种二维 TDOA 无源定位数学模型, 即球面精确计算模型和球面近似计算模型, 并与传统的平面直角坐标 TDOA 无源定位模型进行比较。

2 二维 TDOA 定位的现有模型

现有的二维 TDOA 无源定位模型多基于平面直角坐标系, 如图 1 所示。

$M_i(x_i, y_i)$ 和 $M_j(x_j, y_j)$ 是配置于基线 M_iM_j 两端的 2 个监测站点, 它们与信号源 $S(x, y)$ 的距离分别为 d_i 和 d_j , 单位均为 km。这个距离可以表示为 $d_i=ct_i$ 和 $d_j=ct_j$, 则有

$$\tau_{ij} = t_i - t_j = \frac{d_i - d_j}{c} \quad (1)$$

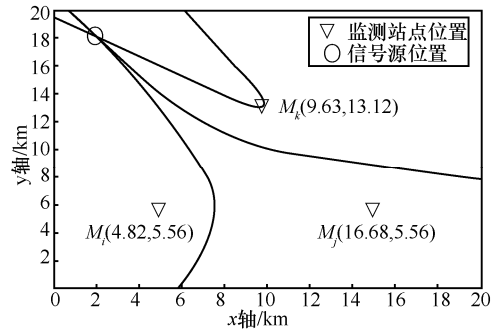


图 1 平面直角坐标系的 TDOA 定位

其中, $c=3 \times 10^8$ m/s 是电波在空中的传播速度; t_i 和 t_j 分别是电波由辐射源传播到监测站 M_i 和 M_j 的时间, 单位为 s; τ_{ij} 为信号到达 2 个监测站的时间差, 单位为 s。式(1)由电波传播速度计算式推导而来, 是 TDOA 的基本公式, 它表明无线电波的到达距离差等价于到达时间差。

对于上述距离单位表示的二维平面直角坐标, TDOA 无源定位方程为

$$\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} - \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} = c\tau_{ij} \quad (2)$$

如果有 N 个监测站点能够接收到某一信号, 且能够测得电波到达这些站点之间的时间差, 那么最多可以得到由 $\frac{N(N-1)}{2}$ 个方程组成的方程组, 即

$$\begin{cases} \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} - \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = c\tau_{21} \\ \sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2} - \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = c\tau_{31} \\ \sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2} - \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} = c\tau_{32} \\ \vdots \\ \sqrt{(x - x_N)^2 + (y - y_N)^2} - \sqrt{(x - x_{N-1})^2 + (y - y_{N-1})^2} = c\tau_{N(N-1)} \end{cases} \quad (3)$$

如果以第一个站点为参考点, 仅仅测量其他站点与第一个站点的信号到达时间差, 则最多可以得到 $(N-1)$ 个方程组成的方程组, 即

$$\begin{cases} \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} - \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = c\tau_{21} \\ \sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2} - \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = c\tau_{31} \\ \sqrt{(x - x_4)^2 + (y - y_4)^2} - \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = c\tau_{41} \\ \vdots \\ \sqrt{(x - x_N)^2 + (y - y_N)^2} - \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = c\tau_{N1} \end{cases} \quad (4)$$

为简化起见，以下其他模型均只列出以第一个站点为参考点的情况。

从式(2)~式(4)可以看出，现有二维 TDOA 无源定位模型是以距离为单位表示的二维平面直角坐标，不直接使用大地经纬度坐标。直接采用大地经纬度坐标将带来方便性，因为大地经纬度容易获取且全球统一，而二维直角坐标一定是球面的某种投影，与投影方法相关。接下来，将探讨如何直接利用大地经纬度坐标进行 TDOA 无源定位。

3 大地经纬度表示的二维 TDOA 定位模型

大地经纬度是用大地经度、大地纬度表示地面点位置的球面坐标。一种简化的地球模型是地球球体模型，该模型表面是一个球面，平均球半径为 6 371.1 km^[15]，在经线和赤道上 1°代表的地球大圆长度为 111.2 km，将地面点 P 的位置用经度和纬度表示。大地经度是通过该点的大地子午面与通过格林尼治天文台的起始大地子午面之间的夹角，规定以起始子午面起算，向东从 0°~180°称为东经 (E)，向西从 0°~180°称为西经 (W)。大地纬度是通过该点的法线与赤道面的夹角，规定由赤道面起算，由赤道面向北从 0°~90°称为北纬 (N)，向南从 0°~90°称为南纬 (S)^[16]。

本文采用地球球体模型，通过大地坐标计算地球表面任意两点之间的距离，可用球面精确计算法、球面近似计算法^[17]和地图投影法^[16]求解，并建立对应的球面精确计算模型、球面近似计算模型和球面正轴圆柱投影模型。

经纬度定位的 TDOA 定位如图 2 所示。令 $M_i(\lambda_i, \varphi_i)$ 和 $M_j(\lambda_j, \varphi_j)$ 为以经纬度表示的 2 个监测站点坐标， $S(\lambda, \varphi)$ 为信号源坐标， λ 为大地经度， φ 为大地纬度。

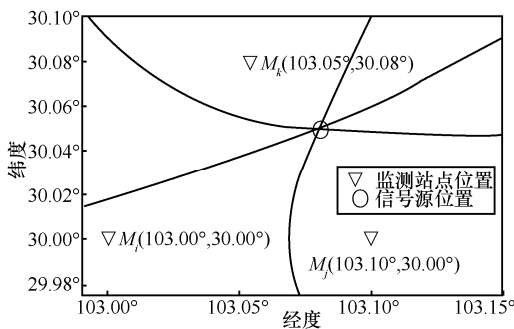


图 2 经纬度坐标的 TDOA 定位

3.1 球面精确计算二维 TDOA 定位

球面上任意两点之间的最短距离是以球心为

圆心的大圆上的短弧^[16]。根据球面余弦公式，可得信号源 $S(\lambda, \varphi)$ 与监测站点 $M_i(\lambda_i, \varphi_i)$ 的距离 d_i 为

$$d_i = 111.2 \arccos[\sin \varphi_i \sin \varphi + \cos \lambda_i \cos \lambda \cos(\lambda - \lambda_i)] \quad (5)$$

式(5)是地球上任意两点间最短距离的精确计算公式，含有超越函数。其中 111.2 是在经线上和赤道上 1°代表的地球大圆长度，单位为 km； λ 和 φ 分别表示大地经度和大地纬度。

由式(1)和式(5)可知，无线电波从地球上任一地点 $X(\lambda, \varphi)$ ，分别到达监测站点 $M_i(\lambda_i, \varphi_i)$ 和 $M_j(\lambda_j, \varphi_j)$ 的时间差 τ_{ij} 为

$$\tau_{ij} = \frac{111.2}{c} \left\{ \arccos[\sin \varphi_i \sin \varphi + \cos \lambda_i \cos \lambda \cos(\lambda - \lambda_i)] - \arccos[\sin \varphi_j \sin \varphi + \cos \lambda_j \cos \lambda \cos(\lambda - \lambda_j)] \right\} \quad (6)$$

式(6)是无线电波从任一地点 $X(\lambda, \varphi)$ 分别到达监测站点 $M_i(\lambda_i, \varphi_i)$ 和 $M_j(\lambda_j, \varphi_j)$ 的时间差的精确计算公式。

如果以第一个站点为参考点，则最多可以得到由 $(N-1)$ 个方程组成的方程组，即

$$\begin{cases} \arccos[\sin \varphi_2 \sin \varphi + \cos \lambda_2 \cos \lambda \cos(\lambda - \lambda_2)] - \\ \arccos[\sin \varphi_1 \sin \varphi + \cos \lambda_1 \cos \lambda \cos(\lambda - \lambda_1)] = \frac{c\tau_{21}}{111.2} \\ \arccos[\sin \varphi_3 \sin \varphi + \cos \lambda_3 \cos \lambda \cos(\lambda - \lambda_3)] - \\ \arccos[\sin \varphi_1 \sin \varphi + \cos \lambda_1 \cos \lambda \cos(\lambda - \lambda_1)] = \frac{c\tau_{31}}{111.2} \\ \vdots \\ \arccos[\sin \varphi_N \sin \varphi + \cos \lambda_N \cos \lambda \cos(\lambda - \lambda_N)] - \\ \arccos[\sin \varphi_1 \sin \varphi + \cos \lambda_1 \cos \lambda \cos(\lambda - \lambda_1)] = \frac{c\tau_{N1}}{111.2} \end{cases} \quad (7)$$

式(7)含有三角函数和反三角函数，属于超越方程组，与经典的二维直角坐标 TDOA 定位方程组(4)差别很大，难以采用已有的 TDOA 定位求解方法解算。

3.2 球面近似计算二维 TDOA 定位

大地坐标距离近似计算二维 TDOA 定位模型是基于球面距离近似计算方法的 TDOA 定位模型。球面距离近似计算方法如下。

通常在较小的尺度上，将大地（地球表面的局部区域）视为平面，以勾股定理计算任意两点之间的距离，再以这两点的经度差大圆弧长和纬度差大

圆弧长为直角边，两点之间的距离为斜边，其经度和纬度单位角度所代表的距离是不同的。在任何纬度，这种方法的误差都不大^[17]，计算方法为

$$d_{ij} = 111.2 \sqrt{(\varphi_i - \varphi_j)^2 + (\lambda_i - \lambda_j)^2 \cos^2 \frac{\varphi_i + \varphi_j}{2}} \quad (8)$$

式(8)是地球上任意两点间最短距离的近似计算公式。经线上 1°代表 111.2 km，而纬线上 1°代表的距离却随纬度的不同而变化，为 $111.2 \cos^2 \frac{\varphi_i + \varphi_j}{2}$ 。

令 r 表示经度差大圆弧长随纬度变化的尺缩因子， \bar{r} 表示经度差大圆弧长随纬度变化的平均尺缩因子，则有

$$\bar{r} = \cos \frac{\varphi_i + \varphi_j}{2} \quad (9)$$

可近似地设 φ_0 为所在区域的纬度值取整，则有

$$r \approx \cos \varphi_0 \quad (10)$$

设纬线上 1°代表的距离为 Δd ，表 1 列出了纬线上每隔 5°的 Δd 值和 r 值。从表 1 可知，不同纬度下经度差 1°时距离有明显差别。

表 1 纬度上每隔 5°的 Δd 值和 r 值

φ_0	$\Delta d/\text{km}$	r
0°	111.2	1.000 0
5°	110.8	0.996 2
10°	109.5	0.984 7
15°	107.4	0.965 9
20°	104.5	0.934 7
25°	100.8	0.906 3
30°	96.3	0.866 0
35°	91.1	0.819 2
40°	85.2	0.766 2
45°	78.6	0.707 1
50°	71.5	0.643 0
55°	63.8	0.573 6
60°	55.6	0.500 0
65°	47.0	0.422 6
70°	38.0	0.341 7
75°	28.8	0.258 8
80°	19.3	0.173 6
85°	9.7	0.087 1

由式(1)、式(8)和式(10)可知，如果以第一个站

点为参考点，则有方程组(11)，其中 $N \geq 3$ 。

$$\begin{cases} \sqrt{(\varphi - \varphi_2)^2 + r^2(\lambda - \lambda_2)^2} - \sqrt{(\varphi - \varphi_1)^2 + r^2(\lambda - \lambda_1)^2} = \frac{c\tau_{21}}{111.2} \\ \sqrt{(\varphi - \varphi_3)^2 + r^2(\lambda - \lambda_3)^2} - \sqrt{(\varphi - \varphi_1)^2 + r^2(\lambda - \lambda_1)^2} = \frac{c\tau_{31}}{111.2} \\ \vdots \\ \sqrt{(\varphi - \varphi_N)^2 + r^2(\lambda - \lambda_N)^2} - \sqrt{(\varphi - \varphi_{N-1})^2 + r^2(\lambda - \lambda_{N-1})^2} = \frac{c\tau_{N1}}{111.2} \end{cases} \quad (11)$$

从形式上看，式(11)与式(4)很相似，主要差别在于信号源与监测站点之间的经度差需要乘以尺缩因子 r ，因此，完全可以采用已有的 TDOA 定位求解方法解算。

3.3 球面正轴圆柱投影二维 TDOA 定位

球面正轴圆柱投影有等距离投影、等角度投影、等面积投影这 3 种^[16]，其中球面等角度正圆柱投影也叫 Web Mercator 投影^[11]。按无线电定位领域的惯例，将投影平面的横轴作为 x 轴、纵轴作为 y 轴，则 3 种球面正轴圆柱投影的横坐标的投影计算式均为

$$x = 111.2\lambda \quad (12)$$

其中，111.2 表示经线上 1°代表的距离，单位为 km； λ 为经度。

而纵坐标的投影计算式不同，其中，球面等距离正圆柱投影公式为

$$y = 111.2\varphi \quad (13)$$

其中， φ 为纬度。

球面等角度正圆柱投影计算式为

$$y = 6371.1 \ln \left[\tan \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \right] \quad (14)$$

球面等面积正圆柱投影计算式为

$$y = 6371.1 \sin \varphi \quad (15)$$

将式(12)和式(13)代入式(2)，可得球面等距离正圆柱投影 TDOA 定位方程组为

$$\begin{cases} \sqrt{(\varphi - \varphi_2)^2 + (\lambda - \lambda_2)^2} - \sqrt{(\varphi - \varphi_1)^2 + (\lambda - \lambda_1)^2} = \frac{c\tau_{21}}{111.2} \\ \sqrt{(\varphi - \varphi_3)^2 + (\lambda - \lambda_3)^2} - \sqrt{(\varphi - \varphi_1)^2 + (\lambda - \lambda_1)^2} = \frac{c\tau_{31}}{111.2} \\ \vdots \\ \sqrt{(\varphi - \varphi_N)^2 + (\lambda - \lambda_N)^2} - \sqrt{(\varphi - \varphi_{N-1})^2 + (\lambda - \lambda_{N-1})^2} = \frac{c\tau_{N1}}{111.2} \end{cases} \quad (16)$$

式(16)与式(4)在形式上完全相同，可通过球面

等距离正圆柱投影式(12)和式(13)相互推导。可见, 球面等距离正圆柱投影 TDOA 模型与经典的二维直角坐标 TDOA 模型等价, 完全可以采用已有的

TDOA 定位求解方法解算。

将式(12)和式(14)代入式(2), 可得球面等角度正圆柱投影 TDOA 定位方程组为

$$\begin{cases} \sqrt{\left[6371.1 \ln \frac{\tan(45^\circ + \frac{\varphi}{2})}{\tan(45^\circ + \frac{\varphi_2}{2})}\right]^2 + [111.2(\lambda - \lambda_2)]^2} - \sqrt{\left[6371.1 \ln \frac{\tan(45^\circ + \frac{\varphi}{2})}{\tan(45^\circ + \frac{\varphi_1}{2})}\right]^2 + [111.2(\lambda - \lambda_1)]^2} = c\tau_{21} \\ \sqrt{\left[6371.1 \ln \frac{\tan(45^\circ + \frac{\varphi}{2})}{\tan(45^\circ + \frac{\varphi_3}{2})}\right]^2 + [111.2(\lambda - \lambda_3)]^2} - \sqrt{\left[6371.1 \ln \frac{\tan(45^\circ + \frac{\varphi}{2})}{\tan(45^\circ + \frac{\varphi_1}{2})}\right]^2 + [111.2(\lambda - \lambda_1)]^2} = c\tau_{31} \\ \vdots \\ \sqrt{\left[6371.1 \ln \frac{\tan(45^\circ + \frac{\varphi}{2})}{\tan(45^\circ + \frac{\varphi_N}{2})}\right]^2 + [111.2(\lambda - \lambda_N)]^2} - \sqrt{\left[6371.1 \ln \frac{\tan(45^\circ + \frac{\varphi}{2})}{\tan(45^\circ + \frac{\varphi_1}{2})}\right]^2 + [111.2(\lambda - \lambda_1)]^2} = c\tau_{N1} \end{cases} \quad (17)$$

式(17)含有对数函数和正切函数, 属于超越方程组, 与经典的二维直角坐标 TDOA 定位方程组(4)差别很大, 难以采用已有的 TDOA 定位求解

方法解算。

将式(12)和式(15)代入式(2), 可得球面等面积正圆柱投影 TDOA 定位方程组为

$$\begin{cases} \sqrt{[6371.1(\sin \varphi - \sin \varphi_2)]^2 + [111.2(\lambda - \lambda_2)]^2} - \sqrt{[6371.1(\sin \varphi - \sin \varphi_1)]^2 + [111.2(\lambda - \lambda_1)]^2} = c\tau_{21} \\ \sqrt{[6371.1(\sin \varphi - \sin \varphi_3)]^2 + [111.2(\lambda - \lambda_3)]^2} - \sqrt{[6371.1(\sin \varphi - \sin \varphi_1)]^2 + [111.2(\lambda - \lambda_1)]^2} = c\tau_{31} \\ \vdots \\ \sqrt{[6371.1(\sin \varphi - \sin \varphi_N)]^2 + [111.2(\lambda - \lambda_N)]^2} - \sqrt{[6371.1(\sin \varphi - \sin \varphi_1)]^2 + [111.2(\lambda - \lambda_1)]^2} = c\tau_{N1} \end{cases} \quad (18)$$

式(18)含有正弦函数, 属于超越方程组, 与经典的二维直角坐标 TDOA 定位方程组(4)差别很大, 难以采用已有的 TDOA 定位求解方法解算。

投影模型和球面等面积正圆柱投影模型。本文采用基于无约束非线性规划的最优化 TDOA 方法^[6,11]。

TDOA 最优化目标函数的通式为

3.4 最优化建模及求解方法

$$f(\lambda, \varphi) = \min \sum_{p=2}^N \left| \Delta t_{p1} - \frac{d_p(\lambda, \varphi) - d_1(\lambda, \varphi)}{c} \right| \quad (19)$$

对于定位方程的求解, 有绘图法、解析法和递归法, 其中, 绘图法需要人工读数; 解析法如两步加权最小二乘法(Chan 方法)等, 仅适用于平面直角坐标, 可用于按平面直角坐标计算的球面近似计算模型; 递归法如 Taylor 级数迭代法(NLS)等^[3], 存在收敛性问题, 因此, 常规的方法不适用于含有超越函数的球面精确计算模型、球面等角度正圆柱

其中, $f(\lambda, \varphi)$ 为以信号源经度 λ 和纬度 φ 为自变量的最优化目标函数, $d_p(\lambda, \varphi)$ 和 $d_1(\lambda, \varphi)$ 分别为第 p 个和第一个监测站点到信号源的距离。

由式(6)和式(19), 可得基于球面精确距离计算的二维 TDOA 模型的最优化目标函数式为

$$f(\lambda, \varphi) = \min \sum_{p=2}^N \left| \Delta t_{p1} - \frac{111.2}{c} \arccos \left[\sin \varphi_p \sin \varphi + \cos \lambda_p \cos \lambda \cos(\lambda - \lambda_p) \right] + \frac{111.2}{c} \arccos \left[\sin \varphi_1 \sin \varphi + \cos \lambda_1 \cos \lambda \cos(\lambda - \lambda_1) \right] \right| \quad (20)$$

由式(8)和式(19), 可得基于球面近似距离计算的二维 TDOA 模型的最优化目标函数式为

$$f(\lambda, \varphi) = \min \sum_{p=2}^N \left| \Delta t_{p1} - \frac{111.2}{c} \left[\sqrt{r^2(\lambda - \lambda_p)^2 + (\varphi - \varphi_p)^2} - \sqrt{r^2(\lambda - \lambda_1)^2 + (\varphi - \varphi_1)^2} \right] \right| \quad (21)$$

由式(14)和式(19)，可得基于等距离正圆柱投影的二维 TDOA 模型的最优化目标函数式为

$$f(\lambda, \varphi) = \min \sum_{p=2}^N \left| \Delta t_{p1} - \frac{111.2}{c} \left[\sqrt{(\lambda - \lambda_p)^2 + (\varphi - \varphi_p)^2} - \sqrt{(\lambda - \lambda_1)^2 + (\varphi - \varphi_1)^2} \right] \right| \quad (22)$$

由式(18)和式(19)，可得基于等角度正圆柱投影的二维 TDOA 模型的最优化目标函数式为

$$f(\lambda, \varphi) = \min \sum_{p=2}^N \left| \Delta t_{p1} - \frac{\sqrt{\left[\frac{6371.1 \ln \frac{\tan(45^\circ + \frac{\varphi}{2})}{\tan(45^\circ + \frac{\varphi_p}{2})} \right]^2 + [111.2(\lambda - \lambda_p)]^2} - \sqrt{\left[\frac{6371.1 \ln \frac{\tan(45^\circ + \frac{\varphi}{2})}{\tan(45^\circ + \frac{\varphi_1}{2})} \right]^2 + [111.2(\lambda - \lambda_1)]^2}}{c} \right| \quad (23)$$

由式(14)和式(19)可得，基于等面积正圆柱投影的二维 TDOA 模型的最优化目标函数式为

$$f(\lambda, \varphi) = \min \sum_{p=2}^N \left| \Delta t_{p1} - \frac{\sqrt{[6371.1(\sin \varphi - \sin \varphi_p)]^2 + [111.2(\lambda - \lambda_p)]^2} - \sqrt{[6371.1(\sin \varphi - \sin \varphi_1)]^2 + [111.2(\lambda - \lambda_1)]^2}}{c} \right| \quad (24)$$

适合无约束非线性规划的一些最优化方法，可能存在少量的不收敛点^[11]，对于含有超越函数的球面精确计算模型、球面等角度正圆柱投影模型和球面等面积正圆柱投影模型也不适用。因此，为避免不同算法可能带来的收敛性、局部极值、精确度差别等问题，采用网格逐点搜索法^[11]求解。

考虑到超短波电波传播的距离通常不超过 50 km，以 TDOA 定位网络的几何中心或者接收到最强信号的站点 $M_0(\lambda_0, \varphi_0)$ 为中心，从东、西、南、北各约 50 km 的范围内进行逐点计算，找出使最优化目标函数 $f(\lambda, \varphi)$ 取最小值的坐标点，即信号源的位置。具体地，搜索范围从经度 $\lambda_0 - \frac{50}{111.2}$ 到 $\lambda_0 + \frac{50}{111.2}$ ，从纬度 $\varphi_0 - \frac{50}{111.2 \cos \varphi_0}$ 到 $\varphi_0 + \frac{50}{111.2 \cos \varphi_0}$ ，步长分别为 $\frac{100}{111.2Q}$ 和 $\frac{100}{111.2Q \cos \varphi_0}$ 。利用 $Q \times Q$ 网格计算顶

点和交叉点，共 $(Q+1) \times (Q+1)$ 个点。定位误差均值一般不超过搜索步进的 2 倍，并且不会出现不收敛的情况。如果要提高定位精度，可减小搜索步长。

4 数值验证

本文通过仿真，比较基于 3 种距离计算方法的 TDOA 定位模型在不同尺度、不同纬度下的性能差别。仿真参数设置如表 2 所示。

对于大地坐标下的球面精确计算定位模型、球面近似计算定位模型、等距离正圆柱投影定位模型（等价于经典的平面直角定位模型）、等角度正圆柱投影定位模型和等面积正圆柱投影定位模型，在纬度上每隔 5° 进行 1 km、10 km、100 km 共 3 种尺度的基线（站距）的仿真，以逐点计算的网格搜索方法，当不考虑时差测量误差时，3 种尺度下的定位误差结果相同，均如图 3 所示。

表 2 仿真参数设置

参数	取值
定位网络构成	距离相等的 3 个监测站点
定位网络中心所处纬度	$0^\circ \sim 85^\circ$ ，步长为 5°
信号源的位置	在定位网络之内，在经线上等间隔取 24 个点，在纬线上等间隔取 13 个点，由于定位网络呈三角形，故共取 156 个不同的点
考虑时间差测量误差	为 $-50 \sim 50$ ns 之间的等概率分布，对应距离误差 ± 15 m
搜索网格数量/个	200×200
定位计算结果与信号源实际位置误差的表示方式	求 156 个定位误差的均方根，并除以基线长度，得到定位误差相对于基线的百分比

注：本文不考虑多径效应引起的时延。

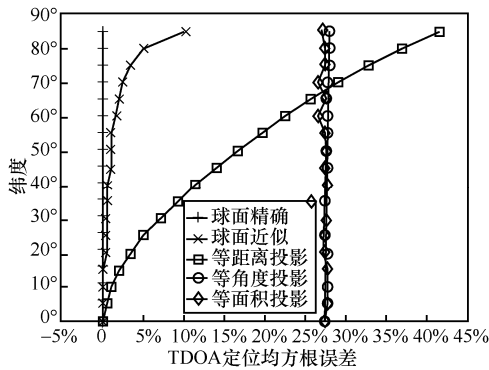


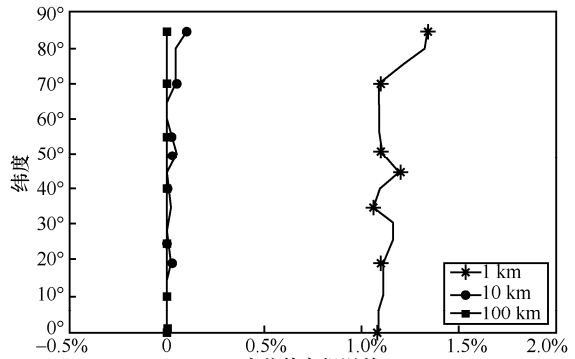
图 3 当不考虑时差测量误差时, 3 种尺度下的定位误差比较

从图 3 可以看出, 在不考虑时差测量误差的情况下, 等角度正圆柱投影 TDQA 定位模型和等面积正圆柱投影 TDQA 定位模型的定位误差比较大, 在任何纬度时均在 26% 左右, 不可用; 球面精确计算 TDQA 定位模型的定位误差极小, 可用; 球面近似计算 TDQA 定位模型的定位误差较小, 在低纬度时定位误差在 0.54% 以内, 在中纬度时定位误差在 0.54%~1.6%, 在高纬度时定位误差高于 10%, 可用; 等距离正圆柱投影 TDQA 定位模型(等价于经典的平面直角 TDQA 定位模型)在低纬度时定位误差在 7.1% 以内, 在中、高纬度时定位误差随纬度增加, 最大可超过 41%, 因此只在低纬度地区可用。

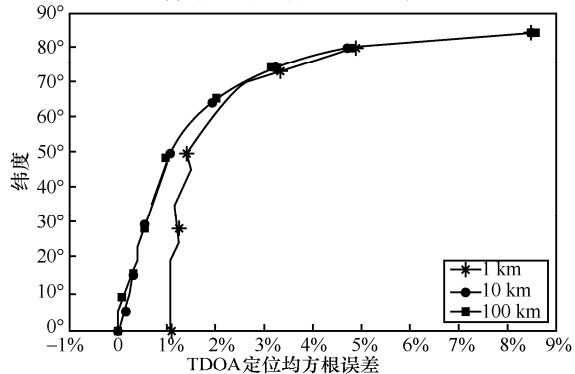
对于大地坐标下的球面精确计算 TDQA 定位模型、球面近似计算 TDQA 定位模型、球面等距离正圆柱投影 TDQA 定位模型(等价于经典的平面直角 TDQA 定位模型), 在纬度上每隔 5° 进行 1 km、10 km、100 km 共 3 种尺度的基线(站距)的仿真, 以逐点计算的网格搜索方法, 获取 3 种尺度下的误差结果。当考虑时差测量误差时, 3 种基线尺度下 3 种模型的定位误差比较如图 4 所示。

从图 4 可以看出, 当考虑时差测量误差时, 3 种可用或者在低纬度地区可用的 TDQA 定位模型中, 在 1 km 基线尺度时, 即最大距离测量误差与基线长度之比为 1.5% 时, 带来 1.1%~1.3% 的均方根误差; 在 10 km 以上基线长度时, 即最大距离测量误差与基线长度之比不到 0.15% 时, 影响可以忽略。因此, 球面精确计算 TDQA 定位模型与球面近似计算 TDQA 定位模型的定位误差也受时差测量误差的影响, 基线越短, 影响越大。球面精确计算 TDQA 定位模型误差极小, 球面等距离正圆柱投影 TDQA 定位模型误差最大, 球面近似计算 TDQA 定位模型误差较小; 球面近似计算 TDQA 定位模型的定位误差随纬度升高而增加, 而球面精确计算模型的定位

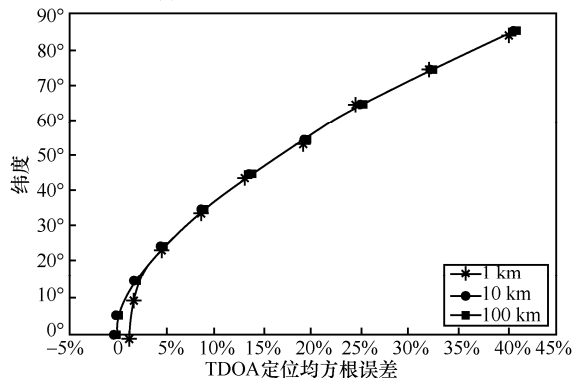
误差与纬度无关。原因是所用的球面上 2 点之间的距离计算方式不同, 球面精确计算 TDQA 定位模型采用球面三角函数方式, 而球面距离近似 TDQA 定位模型采用类似勾股定理的近似计算方式。



(a) 球面精确计算 TDQA 定位模型



(b) 球面近似计算 TDQA 定位模型



(c) 球面等距离正圆柱投影 TDQA 定位模型 (等价于经典的平面直角 TDQA 定位模型)

图 4 当考虑时差测量误差时, 3 种基线尺度下 3 种模型的定位误差比较

5 结束语

基于平面直角坐标与球面坐标的差异, 本文提出了基于大地经纬度的几种二维 TDQA 无源定位数学模型。通过建模和仿真实验, 得到以下结论: 球面精确计算 TDQA 定位模型误差极小, 定位误差与纬度无关; 球面近似计算 TDQA 定位模型误差较

小, 定位误差随纬度升高而增加; 等距离正圆柱投影 TDOA 定位模型等价于传统的平面坐标 TDOA 定位模型, 在低纬度定位误差较小, 但大于球面近似计算 TDOA 定位模型, 可用, 在高纬度地区定位误差大, 不可用; 等角度正圆柱投影 TDOA 定位模型和等面积正圆柱投影 TDOA 定位模型在不考虑时差测量误差情况下的定位误差就比较大, 在任何纬度时均在 26% 左右, 不可用。通过对 1 km、10 km、100 km 这 3 种基线尺度进行比较可知, 定位误差受到达时差测量误差影响, 基线越短, 影响越大。因此, 当需要精确计算时, 应采用球面精确计算 TDOA 定位模型, 但其含有超越函数, 计算复杂度高, 难以采用已有的 TDOA 定位求解方法解算; 当采用近似计算时, 宜采用球面近似计算 TDOA 定位模型, 在低纬度也可采用等价于传统的平面坐标 TDOA 定位模型的等距离正圆柱投影 TDOA 定位模型, 计算复杂度均低, 可采用已有的 TDOA 定位求解方法解算。

更加精确的地球表面模型是椭球面模型, 对应椭球面距离精确计算 TDOA 模型。由于地球的扁度仅为 $\frac{1}{298}$, 通常在不超 100 km 的超短波传播尺度范围内, 精度的提高不明显, 而计算的复杂程度会大大提高。

参考文献:

- [1] MARCHAND N. Error distributions of best estimate of position from multiple time difference hyperbolic networks[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Navigational Electronics, 1964(6): 96-100.
- [2] STILP L A. Time difference of arrival technology for locating narrowband cellular signals[J]. Proceedings of SPIE-The International Society for Optical Engineering, 1996: 134-144.
- [3] 范平志, 邓平, 刘林. 蜂窝网无线定位[M]. 北京: 电子工业出版社, 2002.
FAN P Z, DENG P, LIU L. Cellular wireless location[M]. Beijing: Electronic Industrial Press, 2002.
- [4] SO H C, CHAN Y T, CHAN F K W. Closed-form formulae for time-difference-of-arrival estimation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(6): 2614-2620.
- [5] YANG K, AN J, BU X, et al. Constrained total least-squares location algorithm using time-difference-of-arrival measurements[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2010, 59(3): 1558-1562.
- [6] CHAITANYA D E, RAO G S. Unknown radio source localization based on a modified closed form solution using TDOA measurement technique[C]//4th International Conference on Recent Trends in Computer Science and Engineering. 2016: 184-189.
- [7] MINGSIAN R B, SHIH S L, HUANG J Y. Time difference of arrival (TDOA)-based acoustic source localization and signal extraction for intelligent audio classification[C]//2018 IEEE 10th Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop. 2018: 632-636.
- [8] FOKIN G, KIREEV A, ABDULWAHAB H A. TDOA positioning accuracy performance evaluation for arc sensor configuration[C]//2018 Systems of Signals Generating and Processing in the Field of on Board Communications. 2018: 1-5.
- [9] 金博楠, 徐晓苏, 张涛, 等. 基于 TDOA 定位的阵列布放结构研究[J]. 导航定位与授时, 2017, 4(6): 29-36.
JIN B N, XU X S, ZHANG T, et al. Study on array placement structure based on TDOA location[J]. Navigation, Positioning and Timing, 2017, 4(6): 29-36.
- [10] 周恭谦, 杨露菁, 刘忠, 等. 基于 TDOA 定位的基站布设对模糊区分布及定位精度的影响分析[J]. 海军工程大学学报, 2017, 29(1): 96-101.
ZHOU G Q, YANG L J, LIU Z, et al. Influence analysis of base station layout based on TDOA positioning on fuzzy area distribution and positioning accuracy[J]. Journal of Naval Engineering University, 2017, 29(1): 96-101.
- [11] MA F L, XU Y, XU P. A nonlinear programming based universal optimization model of TDOA passive location[C]//2017 International Conference on Intelligent Systems and Knowledge Engineering. IEEE, 2017: 184-189.
- [12] WANG Y. Unified near-field and far-field localization for AOA and hybrid AOA-TDOA positionings[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2018, 17(2): 1242-1254.
- [13] 宋振祥, 崔传金, 马良. 关于 FM 广播发射位置 TDOA 定位的研究[J]. 中国无线电, 2018, 273(5): 53-54.
SONG Z X, CUI C J, MA L. Study on TDOA location of FM radio transmission location[J]. China Radio, 2018, 273(5): 53-54.
- [14] 胡正, 杨青, 卜晓楠, 等. TDOA 定位中经纬度与平面坐标转换方案的研究[J]. 电子世界, 2019(3): 36-37.
HU Z, YANG Q, PU X N, et al. Study on the transformation scheme between longitude and latitude and plane coordinates in TDOA positioning[J]. Electronic World, 2019(3): 36-37.
- [15] 孔祥元, 郭际明, 刘宗泉. 大地测量学基础[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2010.
KONG X Y, GUO J M, LIU Z Q. Fundamentals of geodesy[M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2010.
- [16] 国家地震局地球物理研究所. 近震分析[M]. 北京: 地震出版社, 1978. IGPCEA of China. Near earthquake analysis[M]. Beijing: Earthquake Press, 1978.
- [17] 吕晓华, 李少梅. 地图投影原理与方法[M]. 北京: 测绘出版社, 2016. LV X H, LI S M. Principles and methods of map projection[M]. Beijing: Mapping Press, 2016.

[作者简介]



马方立 (1966—), 男, 四川成都人, 西南交通大学博士生, 主要研究方向为无线电监测、信号处理、智能信息处理。

徐扬 (1956—), 男, 河南新乡人, 博士, 西南交通大学教授、博士生导师, 主要研究方向为逻辑代数、数理逻辑、不确定性推理、自动推理。

徐鹏 (1981—), 男, 河南新乡人, 博士, 西南交通大学讲师, 主要研究方向为无线网络资源管理、智能信息处理、无线电管理与监测、信息安全。